Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 2
19 Ottobre 2012

1. Studiare il comportamento delle funzioni, prestando particolare attenzione al bordo del disco di convergenza, definite come somma delle serie:
(a)$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$;
(b)$g(z) = \sum_{n\geq 1} z^n$;
(c)$h(z) = \sum_{n\geq 1} z^{2^n}$.

SOLUZIONE
(a) Innanzitutto calcolo il raggio di convergenza R che per la formula di Hadamard si trova:
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$
In questo caso si vede facilmente che il raggio di convergenza é 1.
A questo punto studio cosa succede alla funzione sul bordo del disco di convergenza⇒
Se $|z| = 1$ la serie converge assolutamente (quindi converge) in quanto $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{1}{n^2}\right| < \infty$.
$f(z)$ si puó estendere al bordo del disco di convergenza in maniera continua.
(b) Anche in questo caso il raggio di convergenza della serie é 1, ma non posso sfruttare lo stesso ragionamento precedente per vedere come si comporta la serie sul bordo del disco di convergenza in quanto la serie non converge assolutamente se $|z| = 1$(una somma infinita di tutti 1 diverge banalmente). In questo caso sfrutto il fatto che la serie che definisce la mia funzione é una geometrica, quindi puó essere scritta come $f(z) = \frac{1}{1-z}$.
Questa funzione puó essere estesa in maniera continua in tutti i punti del bordo del disco di convergenza tranne che in 1.
(c) $h(z)$ puó essere cosiderata come una sottoserie della serie precedente e possiede lo stesso raggio di convergenza. Tuttavia non posso estendere $h(z)$ in maniera continua in nessun punto del bordo. Infatti⇒
$\forall n \in \mathbb{N}$ fissato si ha che $\lim_{x\to 1} s_n = \lim_{x\to 1} x^2 + x^4 + \cdots + x^{2^n} = n \to \infty$, con x che varia in $\mathbb{R}$.
Notiamo che $h(z) = z^2 + \sum_{n\geq 1} z^{2^{n+1}} = z^2 + h(z^2)$ che tende a ∞ per $x^2 \to 1$.
Si puó ripetere lo stesso raggionamento su ε radice n-esima dell'unitá ⇒

$\lim_{z\to\varepsilon} h(z) = \lim_{z\to\varepsilon} z^2 + \dots + z^{2^n} + h(z^{2^n}) = \lim_{z\to\varepsilon} \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \dots + 1 + h(z^{2^n}) = \varepsilon^2 + \varepsilon 4 + \dots + 1 + \lim_{x\to 1} h(x) = \infty$.
Cioé per $\forall n \in \mathbb{R}$ non posso estendere $h(z)$ sulle radici n-esime dell'unitá. Queste ultime per $n \to \infty$ sono dense sul bordo del disco, quindi non posso estendere la funzione su nessun punto del bordo poiché preso un qualsiasi punto del bordo non esiste nessun intorno di esso che non contenga una radice n-esima dell'unitá (per definizione di densitá).

2. Calcolare i primi termini (fino al grado 4) dell'inversa della serie formale $cos(z)$.

SOLUZIONE Per calcolare l'inversa formale di $cos(z)$ utilizzo la seguente uguaglianza:

$$(1+x)(1+x+x^2+x^3+\dots) = 1$$

Infatti posso scrivere $cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots \Rightarrow$
Ponendo $f(z) = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} - \dots$ si ha che $cos(z) = 1 - f(z)$.
Ora basta applicare l'uguaglianza precedente per notare che:
$cos(z)^{-1} = (1 + f(z) + f(z)^2 + \dots) \Rightarrow$
Si ottengono cosí i termini fino al grado 4 della serie:

$$1 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{48}$$

3. Sviluppare in serie di potenze nel punto indicato:
(a)$f(z) = \frac{1}{z^2-2z+2}$, in $z = 1$;
(b)$g(z) = \frac{1}{(2i+z)^3}$, in $z = 0$;
(c)$h(z) = \frac{e^z - cos z}{z-2}$, in $z = 0$.

SOLUZIONE
(a)$f(z) = \dfrac{1}{1+(z-1)^2}$ e sfrutto la serie notevole $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z)^n = \dfrac{1}{1+z}$.
$\Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^{2n}$.
(b)$\dfrac{1}{(2i+z)^3} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dz^2}\dfrac{1}{2i+z} = \dfrac{1}{4i}\dfrac{d^2}{dz^2}\dfrac{1}{1+\frac{z}{2i}} = \dfrac{1}{4i}\dfrac{d^2}{dz^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\dfrac{z}{2i})^n$.
Ora basta portare la derivata dentro la sommatoria per ottenere il seguente sviluppo in serie di potenze:
$\dfrac{1}{4i}\sum_{n\geq 2}\left(\dfrac{-1}{2i}\right)^n (n)(n-1)z^{n-2}$.
(c) $e^z = \sum_{k\geq 0}\dfrac{z^k}{k!}$

$$cos(z) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$
$$e^z - cos(z) = sin(z) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\frac{1}{t-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(\frac{z}{2})^k$$

4. Verificare che:
(a)$sin(z) = -isinh(iz)$;
(b)$tanh(z) = -itan(iz)$.

SOLUZIONE
(a)$sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -isinh(z)$.
(b)$tanh(z) = \dfrac{sinh(z)}{cosh(z)} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$,
$tan(iz) = -i\dfrac{e^{-z} - e^z}{2i(e^z + e^{-z})} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

5. Descrivere l'insieme $S = \{z \in \mathbb{C} : cos(z) \in \mathbb{R}\}$. La funzione $cos(z)$ é limitata?

SOLUZIONE S è l'unione dell'asse reale e delle rette $\{k\pi + iy : y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$
Inoltre $cos(z)$ non é una funzione limitata. Per verificarlo basta considerare $z = iy$,con $y \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\lim_{y\to\infty} cos(iy) = \lim_{y\to\infty} \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \infty$.

6. Sia $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ una serie di potenze.
Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, allora R é il raggio di convergenza della serie.

SOLUZIONE Per ipotesi esiste il limite, sia S. Si vuole dimostrare che $R = S$.
Dalla definizione di limite segue subito che:
$$\frac{1}{S+\varepsilon}|a_n| \;\leq\; |a_{n+1}| \;\leq\; |a_n|\frac{1}{S-\varepsilon}$$
Poiché tale relazione vale $\forall n > \overline{n}$ fissato ci si riconduce alla seguente (iterando):
$$\left(\frac{1}{S+\varepsilon}\right)^k |a_n|^k \;\leq\; |a_{n+k}| \;\leq\; |a_n|^k \left(\frac{1}{S-\varepsilon}\right)^k$$
Ora per ricavare l'asserto basta passare al $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\ldots}$. Infatti si avrá che:

$\bullet \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 1$ in quanto n fissato;

$\bullet \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_{n+k}} = \dfrac{1}{R}$. Quindi si arriva alla relazione:

$$\frac{1}{S+\varepsilon} \leq \frac{1}{R} \leq \frac{1}{S-\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ Per arbitrarietá di ε $R = S$.

7. Calcolare:

$$\int_C zIm(z^2)dz$$

dove $C := \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| \leq 1, Re(z) = 1\}$.

SOLUZIONE Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{C}$ t.c. $t \mapsto \gamma(t) \Rightarrow$
$\displaystyle\int_C f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^\bullet(t)dt$
Innanzitutto si deve definire l'insieme C come un cammino. Nel nostro caso γ é il segmento che unisce $1-i$ e $1+i$.
Tale segmento é parametrizzato dal cammino $\gamma(t) = 1 - i + 2it$, con $t \in [0,1]$ e $\gamma(t)^\bullet = 2i$.
$\displaystyle\int_C zIm(z^2)dz = \int_0^1 [1 + i(2t-1)]2(1)(2t-1)2idt = \int_0^1 [1 + i(2t-1)](2t-1)dt = -\frac{4}{3}$.